2010年8月26日実施

２０１１年度立命館大学大学院理工学研究科
博士課程前期課程
入学試験問題（専門科目）

数　学　型

【注意事項】

1．解答は問題番号１、２、・・ごとに解答用紙１枚を使用して下さい。
2．受験番号、氏名、問題番号を解答用紙すべてに記入して下さい。
3．無記名答案は無効、問題用紙および解答用紙の持ち帰りは認めていません。
4．解答用紙はホッチキス止めしてあるので、はずさないで下さい。
5．専門科目の選択方法
　問題用紙が事前に届け出ている型の問題であるか確認し、以下のような専門科目の選択方式に従って解答してください。

数　学　型：	以下の３問必答。 ①微分・積分学 ②線形代数学 ③集合論・位相空間論

6．専門科目試験時間
　数学型・物理型
　１３：００～１５：００（１２０分）試験時間中の途中退室は認めていません。
　数学型・物理型以外
　１３：００～１６：００（１８０分）試験時間中の途中退室は認めていません。

立命館大学大学院理工学研究科（博士課程前期課程）

［専門科目］数学型

1～3のすべてに解答すること。（3問必答）

1．微分・積分学

$[0,1]$ 上で連続な実数値関数 f に対して，$[0,1]$ 上の関数 F_1 を

$$F_1(x) = \int_0^x tf(t)dt \quad (\, x \in [0,1] \,)$$

により定義する．次の問に答えよ．

(1) 次の不等式が成り立つことを示せ:

$$\max_{x\in[0,1]} F_1(x) \leq \frac{1}{2} \max_{x\in[0,1]} f(x).$$

(2) F_1 が $a \in (0,1)$ で最大値を取るならば，$f(a) = 0$ が成り立つことを示せ．

(3) 各自然数 $n = 1, 2, 3, \ldots$ について順に

$$F_{n+1}(x) = \int_0^x tF_n(t)dt \quad (\, x \in [0,1] \,)$$

とおいて関数列 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定義すると，関数項級数

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$$

は $[0,1]$ 上一様収束し，等式

$$F'(x) = x(F(x) + f(x)) \quad (\, x \in (0,1) \,)$$

を満たすことを示せ．

(4) f が定数関数 1 であるとき，各自然数 n について $F_n(x)$ を求め，さらに，$F(x)$ を求めよ．

立命館大学大学院理工学研究科（博士課程前期課程）

［専門科目］数学型

1～3のすべてに解答すること。（3問必答）

2．線形代数学

a を実数とし

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2a \\ 1 & 1 & -a+1 \end{pmatrix}$$

とおく．

次の問に答えよ．

(1) 行列 A が正則であるための a に関する必要十分条件を求めよ．

(2) A が正則であるとき，逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) A が正則でないとき，A の階数を求めよ．

立命館大学大学院理工学研究科（博士課程前期課程）

［専門科目］数学型

1～3のすべてに解答すること。（3問必答）

3．集合論・位相空間論

$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ 上の距離 $d_p(1 \leq p < \infty)$ と d_∞ を次のように定義する：

$$
\begin{aligned}
d_p(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \\
d_\infty(x,y) &= \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|,
\end{aligned}
$$

ただし $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $1 \leq p < \infty$ に対して,

(a) $d_p(x,y) \leq A\, d_\infty(x,y)$ がすべての $x, y \in \mathbb{R}^n$ について成り立つような正の実数 A が存在することを示せ.

(b) $d_\infty(x,y) \leq B\, d_p(x,y)$ がすべての $x, y \in \mathbb{R}^n$ について成り立つような正の実数 B が存在することを示せ.

(2) $1 \leq p, k < \infty$ 満たす任意の p, k について

$$C\, d_p(x,y) \leq d_k(x,y) \leq D\, d_p(x,y)$$

がすべての $x, y \in \mathbb{R}^n$ について成り立つような正の実数 C, D が存在することを示せ.

(3) 次の条件を満たす $\mathbb{R}^n$ 上の距離 d の例を一つ構成せよ:

- $d_\infty(x,y) \leq E\, d(x,y)$ がすべての $x, y \in \mathbb{R}^n$ について成り立つような正の実数 E は存在しない.